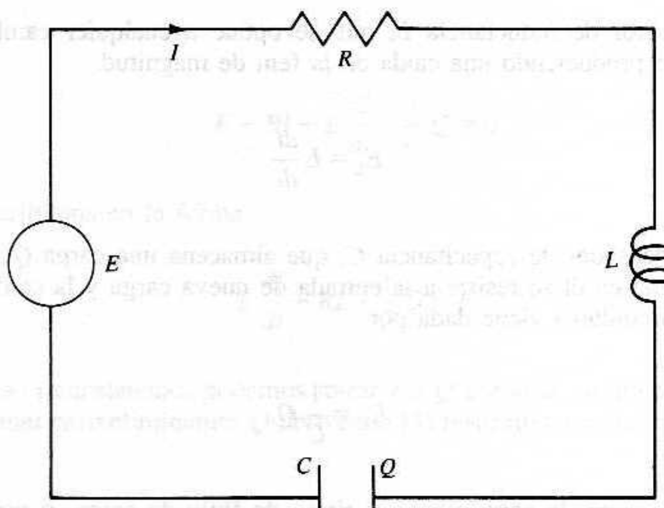

Figura 18

9. En el Ejemplo 4, resolver la ecuación de la trayectoria para y y determinar condiciones sobre a y b que permitan a la barca alcanzar la orilla opuesta. ¿Dónde tocará la orilla?

13. CIRCUITOS ELECTRICOS SIMPLES

En la presente sección consideramos las ecuaciones diferenciales lineales que gobiernan el flujo eléctrico en el circuito simple de la Figura 18. Este circuito consta de cuatro elementos cuya acción se puede entender con facilidad sin conocimientos especiales de electricidad.

A. Una fuente de fuerza electromotriz (fem) E, digamos una batería o un generador, que impulsa a las cargas eléctricas y produce una corriente I. Según la naturaleza de la fuente, E puede ser constante o función del tiempo.

B. Una resistencia R, que se opone al paso de la corriente produciendo una caída en la fem de magnitud

$$E_R = RI.$$

Esta ecuación se llama *ley de Ohm*[2].

[2] Georg Simon Ohm (1787-1854) fue un físico alemán cuya única contribución relevante fue la ley aquí citada. Cuando la anunció en 1827 parecía demasiado maravillosa para ser cierta, y nadie la creyó. Ohm sufrió con ello tal descrédito y fue tan maltratado que renunció a su plaza de profesor en Colonia, y vivió varios años en la oscuridad y en la pobreza antes de que se reconociera que estaba en lo cierto. Alumno suyo en Colonia fue Peter Dirichlet, que habría de llegar a ser uno de los más eminentes matemáticos del siglo XIX.

C. Un inductor de inductancia L, que se opone a cualquier cambio en la corriente produciendo una caída en la fem de magnitud

$$E_L = L\frac{dI}{dt}.$$

D. Un condensador de capacitancia C, que almacena una carga Q. La carga acumulada en él se resiste a la entrada de nueva carga y la caída de fem que ello conlleva viene dada por

$$E_C = \frac{1}{C}Q.$$

Además, como la corriente es el ritmo de flujo de carga, y por tanto el ritmo al que la carga se acumula en el condensador, tenemos

$$I = \frac{dQ}{dt}.$$

Los estudiantes que no estén familiarizados con los circuitos eléctricos encontrarán útil pensar en la corriente I como el análogo del ritmo al que fluye el agua en una tubería. La fem E juega el papel de una bomba de presión (voltaje) que hace que el agua fluya. La resistencia R es el análogo del rozamiento en la tubería, que se opone al flujo produciendo una caída de la presión. La inductancia L es una especie de inercia que se opone a cualquier cambio en el flujo produciendo una caída de la presión si el flujo crece y un aumento de presión si el flujo decrece. La mejor manera de pensar en el condensador es visualizarlo como un tanque cilíndrico de almacenamiento en el que el agua entra por un agujero en su fondo: cuanto más profunda está el agua en el depósito (Q) más cuesta bombear agua adicional en él; y cuanto mayor es la base del depósito (C) para una cantidad dada de agua almacenada, menos profunda es el agua y cuesta menos bombear agua en él.

Estos elementos de circuitos actúan conjuntamente de acuerdo con la *ley de Kirchhoff* según la cual la suma algebraica de las fuerzas electromotrices en torno a un circuito cerrado es cero[3]. Este principio lleva a que

$$E - E_R - E_L - E_C = 0,$$

[3] Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887) fue otro científico alemán cuyas investigaciones sobre circuitos eléctricos son familiares a todo estudiante de física elemental. Estableció además los principios del análisis espectral y allanó el camino a las aplicaciones de la espectroscopia en la determinación de la constitución química de las estrellas.

es decir,

$$E - RI - L\frac{dI}{dt} - \frac{1}{C}Q = 0,$$

que reescribimos en la forma

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C}Q = E. \tag{1}$$

Según las circunstancias, podemos mirar I o Q como la variable dependiente. En el primer caso eliminamos Q derivando (1) respecto a t y sustituyendo dQ/dt por I:

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = \frac{dE}{dt}. \tag{2}$$

En el segundo caso, reemplazamos simplemente I por dQ/dt:

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E. \tag{3}$$

Consideraremos estas ecuaciones lineales de segundo orden con más detalle posteriormente. Nuestro interés en esta sección se centra sobre todo en la ecuación lineal de primer orden

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E \tag{4}$$

obtenida de (1) cuando no hay condensador.

Ejemplo 1. Resolver la ecuación (4) con una corriente inicial I_0, si se conecta en el circuito una fem E_0 en el instante $t = 0$.

Para $t \geqslant 0$, nuestra ecuación es

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E_0.$$

Separando variables,

$$\frac{dI}{E_0 - RI} = \frac{1}{L}\,dt.$$

Integrando y usando la condición inicial $I = I_0$ cuando $t = 0$ obtenemos

$$\log(E_0 - RI) = -\frac{R}{L}t + \log(E_0 - RI_0),$$

luego

$$I = \frac{E_0}{R} + \left(I_0 - \frac{E_0}{R}\right)e^{-Rt/L}.$$

Nótese que la corriente I consta de una parte *estacionaria* E_0/R y otra *transitoria* $(I_0 - E_0/R)e^{-Rt/L}$ que tiende a cero al crecer t. En consecuencia, la ley de Ohm $E_0 = RI$ es aproximadamente válida para grandes t. Observemos también que si $I_0 = 0$, entonces

$$I = \frac{E_0}{R}(1 - e^{-Rt/L}),$$

y si $E_0 = 0$, entonces $I = I_0 e^{-Rt/L}$.

PROBLEMAS

1. En el Ejemplo 1, con $I_0 = 0$ y $E_0 \neq 0$, probar que la corriente en el circuito alcanza la mitad de su máximo teórico en $(L \log 2)/R$ segundos.
2. Resolver (4) cuando el circuito tiene una corriente inicial I_0 y la fem conectada en $t = 0$ viene dada por

   (*a*) $E = E_0 e^{-kt}$;
   (*b*) $E = E_0 \operatorname{sen} \omega t$.
3. Consideremos un circuito descrito por la ecuación (4). Demostrar que:

   (*a*) La ley de Ohm se satisface siempre que la corriente está en un máximo o en un mínimo.
   (*b*) La fem es creciente cuando la corriente está en un mínimo y decreciente cuando está en un máximo.
4. Si $L = 0$ en la ecuación (3) y $Q = 0$ en $t = 0$, hallar la carga $Q = Q(t)$ del condensador en cada uno de estos casos:

   (*a*) E es una constante E_0;
   (*b*) $E = E_0 e^{-t}$;
   (*c*) $E = E_0 \cos \omega t$.
5. Usar la ecuación (1) con $R = 0$ y $E = 0$ para calcular $Q = Q(t)$ e $I = I(t)$ para la descarga de un condensador a través de una inductancia L, con condiciones iniciales $Q = Q_0$ e $I = 0$ en $t = 0$.