1. Dado el problema
$$\left.\begin{array}{r}\left(x+ye^{\frac{y}{x}}\right)dx - xe^{\frac{y}{x}}dy = 0\\ y(1)=0\end{array}\right\}$$
   a) ¿Se cumple Picard?
   b) Obtener la solución general.
   c) Hallar el intervalo maximal de existencia.
2. Dada la ecuación
$$(y^2+x^2)dx + xydy = 0$$
   a) ¿Se cumple Picard con $y(1)=1$?
   b) Hallar el intervalo maximal de existencia.
   c) Obtener la solución, si existe, para $y(1)=0$.
3. Resolver la ecuacón
$$\left(ycos\left(\frac{y}{x}\right)+xsin\left(\frac{y}{x}\right)\right)dx = xcos\left(\frac{y}{x}\right)dy$$
4. Resolver las siguientes ecuaciones
   a) $2y'+y=(x-1)y^3$
   Sol: $y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{x+ke^x}}$
   b) $3x^2\dfrac{dy}{dx}-6xy+2y^{5/2}=0$
   Sol: $y=\left(\dfrac{1}{2x}+\dfrac{k}{x^3}\right)^{-2/3}.$
   c) $y'=ytg(x)+cos(x)$
   Sol: $y=\dfrac{sin(2x)/4+x/2+k}{cos(x)}$
   d) $y'=\dfrac{1}{xsin(y)+2sin(2y)}$
   Sol: $4e^{cos(y)}-4cos(y)e^{cos(y)}-xe^{cos(y)}=k.$
   e) $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{y}{x}=-xy^2$
   Sol: $y=\dfrac{1}{x(x+k)}.$
   f) $\dfrac{dy}{dx}-2xy=6xe^{x^2}$
   Sol: $y=(3x^2+k)e^{x^2}.$
   g) $y'+y=\dfrac{1}{1+e^{2x}}$
   Sol: $y=(arctg(e^x)+k)e^{-x}.$
   h) $y''+y=sec(x)$
   Sol: $y=C_1sen(x)+C_2cos(x)+xsen(x)+cos(x)ln(cos(x)).$
   i) $y''+y=tg(x)$
   Sol: $y=C_1sen(x)+C_2cos(x)-cos(x)ln\left(\dfrac{1+sen(x)}{cos(x)}\right).$
   j) $y''+y=xcos(x)$
   Sol: $y=C_1sen(x)+C_2cos(x)+sen(x)\left(\frac{x}{2}cos(x)sen(x)+x^2/2-\frac{1}{4}sen(x)^2-x^2/4\right)+$
   $cos(x)\left(\frac{x}{2}cos(x)^2-\frac{1}{4}cos(x)sen(x)-x/4\right).$

k) $y'' - y' - 6y = e^{-x}$
Sol: $y = C_1e^{3x} + C_2e^{-2x} - \frac{e^{-x}}{4}$.

l) $y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0$
Sol: $y = C_1e^{x} + C_2e^{2x} + C_3e^{-2x} + C_4e^{-x}$.

m) $y^{(4)} - 2y^{(3)} + 2y'' - 2y' + y = 0$
Sol: $y = C_1e^{x} + C_2xe^{x} + C_3sen(x) + C_4cos(x)$.

n) $t^2y'' + ty' + y = 0$
Sol: $y = C_1sen(ln(x)) + C_2cos(ln(x))$.

o) $t^2y'' + 2ty' - 4y = 0$
Sol: $y = C_1x^{\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{17}}{2}} + C_2x^{\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{17}}{2}}$.

p) $x^2y'' - xy' + y = ln(x)$
Sol: $y = C_1x + C_2xln(x) + ln(x) + 2$.

q) $y'' + 4y' + 5y = e^{x}cos(x)$
Sol: $y = C_1sen(x)e^{-2x} + C_2cos(x)e^{-2x} + \frac{1}{39}e^{x}\left(3cos(x) + 2sen(x)\right)$.

r) $t^2y'' - 2xy' + 2y = xe^{-x}$

s) $(1-x)y'' + xy' - y = (x-1)^2$
Sol: $y = C_1x + C_2e^{x} + 1 + x^2$.

t) $2y'' - 3y' + y = xsin(x)$
Sol: $y = \frac{3}{10}xcos(x) + \frac{7}{50}cos(x) - \frac{1}{10}xsen(x) - \frac{12}{25}sen(x) + 2e^{x}C_1 + C_2e^{x/2}$.

u) $y'' + \lambda^2y = cos(\lambda t) + t^3$
Sol (si $\lambda \neq 0$): $y = C_1sen(\lambda x) + C_2cos(\lambda x) + \dfrac{1}{2}\dfrac{\lambda^2cos(\lambda x) + \lambda^3xsen(\lambda x) + 2\lambda^2x^3 - 12x}{\lambda^4}$.

v)
$$\begin{cases} y'' + y = cos(x) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$
Sol: $y = \frac{x}{2}sen(x)$.

w)
$$\begin{cases} y'' + y = sin(x) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$
Sol: $y = -\frac{1}{2}sen(x) + cos(x) - \frac{1}{2}xcos(x)$.

5. Una taza de café se enfría de 80 a 60 grados en cinco minutos a una temperatura ambiente de 10 grados. Calcular la temperatura de la taza a los 20 minutos.
Sol: 28.22 grados.

6. Un circuito en serie se conecta a una inductancia de 2 henry con una resistencia de 10 ohmios a una fuente de 12 voltios. Escribir la ecuación que modeliza el ciruito. Qué se puede decir a largo plazo de la intensidad?
Sol: $I' + 5I = 6, I(t) = \frac{6}{5} + Ke^{-5t}$. A largo plazo se estabiliza en 6/5.

7. La población de una comunidad se incrementa a una tasa proporcional al número de personas. Se sabe que en un lustro la población inicial A se duplica. Calcular cuánto tiempo tardará la población en triplicarse.
Sol: 7.92 años, aproximadamente.

8. Considérese el circuito de la figura 1
Calcular la intensidad de corriente, suponiendo que el circuito est descargado ($i(0) = i'(0) = 0$), cuando:

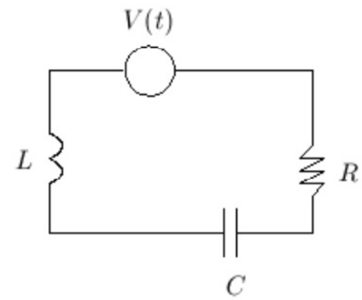

Figure 1: Circuito

i) $C = 1F; R = 1\Omega; L = 0H; V(t) = sin(t)$
Sol: $I' + I = cos(t); I(t) = \frac{1}{2}cos(t) + \frac{1}{2}sen(t) - \frac{1}{2}e^{-t}$.

ii) $C = 1F; R = 2\Omega; L = 0H; V(t) = e^t cos(2t)$
Sol: $2I' + I = e^t cos(2t) - 2sen(2t)e^t; I(t) = \frac{11}{25}cos(2t)e^t - \frac{2}{25}sen(2t)e^t - \frac{11}{25}e^{-\frac{1}{2}t}$.

iii) $C = 1F; R = 1\Omega; L = 1H; V(t) = t^2$
Sol: $I'' + I' + I = 2t$; $I(t) = -\frac{2\sqrt{3}}{3}sen(\frac{1}{2}t\sqrt{3})e^{-\frac{1}{2}t} + 2cos(\frac{1}{2}t\sqrt{3})e^{-\frac{1}{2}t} + 2t - 2$.

9. Resolver los problemas de contorno:

   i) $y'' + \lambda y = 0, y(0) = 0, y'(L) = 0$
   Sol (si $\lambda \neq 0$): $y = C_1 sen(\frac{\pi}{2L}(2n+1)t)$.

   ii) $y'' + \lambda y = 0, y(0) = 0, y'(\pi) = 0$
   Sol: $y = C_1 sen(\frac{2n+1}{2}t)$.

10. Encontrar para qué valores de λ tiene solución no trivial el problema de contorno:

$$y'' - 2y' + (1+\lambda)y = 0, y(0) = 0, y(1) = 0.$$

Sol (si $\lambda > 0$): $y = C_1 e^t sen(n\pi t)$.

11. Estudiar cualitativamente las siguientes ecuaciones:

   i) $y' = a(y+1)(y-1), a > 0$.

   ii) $y' = (y-k)(y+k), k \in \mathbb{R}$.

12. Aplica el método de Euler para resolver el problema

$$y' = 1 - 2ty, y(0) = 0,$$

dando tres pasos de amplitud $h = 0.1$ para aproximar $y(0.3)$.
Sol: $y(0.3) \approx 0.29008$.

13. Resolver la siguiente ecuación diferencial por el método de Heun para aproximar $y(0.4)$:

$$y' = x^2 - y, y(0) = 1.$$

Tomar $h = 0.2$ y realizar dos pasos. Luego, tomar $h = 0.1$ y realizar cuatro pasos. Comparar ambos casos con el valor de la solución exacta.
Sol: $y(0.4) \approx 0.694879$ con $h = 0.2$. $y(0.4) \approx 0.690930$ con $h = 0.1$. La solución exacta en 0.4 es $y = 0.689679$. El error con $h = 0.2$ es 0.005200. El error con $h = 0.1$ es 0.001250; $\frac{0.005200}{0.001250} = 4.16$.

14. Resolver la siguiente ecuación diferencial para aproximar $y(0.2)$

$$y' = x^2 - y, y(0) = 1$$

utilizando Runge-Kutta. Tomar $h = 0.2$ y realizar un paso. Luego, tomar $h = 0.1$ y realizar dos pasos. Comparar ambos casos con el valor de la solución exacta.
Sol: $y(0.2) \approx 0.8212733333333333$ con $h = 0.2$, error =0.0000040864113149963 19. $y(0.2) \approx 0.8212694954348958$ con $h = 0.1$, error $=2.4851287749871886e-7$. La solución exacta en 0.2 es $y = 0.8212692469220183$.
Luego, $\frac{0.000004086411314996319}{2.4851287749871886e-7} = 16.44$.